1. 长为 l 的均匀杆，侧面绝缘，一端温度为零，另一端有恒定热流 q 进入（即单位时间内通过单位截面积流入的热量为 q），杆的初始温度分布是 $\frac{x(l-x)}{2}$，试写出相应的定解问题。

解 见图 1－8，该问题是一维热传导方程，初始条件题中已给出，为

$$u(x,0)=\frac{x(l-x)}{2} \quad (0\leqslant x\leqslant l)$$

现考虑边值条件，设在 $x=0$ 这个端点处温度为 0，则有

$$u(0,t)=0 \quad (t>0)$$

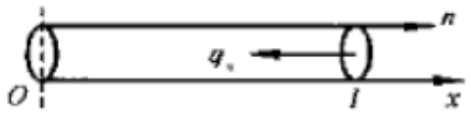


图 1－8

另一端（$x=l$）处再恒定的热流 q 进入杆内，由傅里叶实验定律，在边界曲面 $\sum$ 上有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sum}=q_n$$

其中 q_n 为沿边界外法向的热流强度，在 $x=l$ 端，边界外法向就是 x 轴的正向，而现在热量是流入杆内，表明热流方向与 x 轴正向相反，故有

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}=-q$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{q}{k}$$

综上所述，相应的定解问题为

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=0,u_x(l,t)=\dfrac{q}{k} \\ u(x,0)=\dfrac{x(l-x)}{2} \end{cases}$$

2. 长为 l 的弦两端固定，开始时在 $x=c$ 受到冲量 k 的作用，试

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园！

写出相应的定解问题。

解 该问题为一维弦振动问题，边界条件是显然的。由于弦两端固定，所以在这两点处位移为零，即

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

现考虑初始条件，当冲量 k 作用于 $x = c$ 处时，就相当于在这点给出了一个初速度，我们考虑以 c 点为中心，长为 2δ 的一小段弦 $(c-\delta, c+\delta)$，设弦是均匀的，其线密度为 ρ，则这一小段弦的质量为 $2\delta\rho$，受冲击时速度为 $u_t(x,0)$，由动量定理得

$$2\delta\rho\, u_t(x,0) = k \quad (c-\delta \leqslant x \leqslant c+\delta)$$

在这个小段外，初速度仍为零，我们想得到的是 $x = c$ 处受到冲击的初速度，所以最后还要令 $\delta \to 0$。此外，弦是没有初位移的，即 $u(x,0) = 0$，于是初始条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & |x-c| > \delta \\ \dfrac{k}{\partial\delta\rho}, & |x-c| \leqslant \delta \end{cases} \quad (\delta \to 0) \end{cases}$$

所以定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & |x-c| > \delta \\ \dfrac{k}{\partial\delta\rho}, & |x-c| \leqslant \delta \end{cases} \quad (\delta \to 0) \end{cases}$$

3. 有一均匀杆，只要杆中任一小段有纵向位移或速度，必导致邻段的压缩或伸长，这种伸缩传开去，就有纵波沿着杆传播，试推导杆的纵振动方程。

解 如图 1-9 所示，取杆长方向为 x 轴正向，垂直于杆长方向的各截面均用它的平衡位置 x 标记，在时刻 t，此截面相对

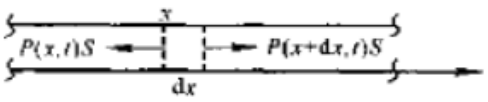


图 1-9

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

于平衡位置的位移为 $u(x,t)$，我们考查杆内一小段$(x,x+\mathrm{d}x)$的振动情况，通过截面 x，这一小段杆受到弹性力为 $P(x,t)S$，其中 $P(x,t)$ 为单位面积所受的弹性力，即应力。规定沿 x 轴方向为正，通过截面 $x+\mathrm{d}x$ 受到的弹性力为 $P(x+\mathrm{d}x)S$. 对这一小段应用牛顿第二定律，于是有

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[P(x+\mathrm{d}x,t)-P(x,t)]S$$

设杆的密度为 ρ，则 $\mathrm{d}m=\rho S\mathrm{d}x$，上式化为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

又 $x+\mathrm{d}x$ 点处的位移 $u(x+\mathrm{d}x,t)=u(x,t)+\mathrm{d}u=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，因此小段$(x,x+\mathrm{d}x)$的伸长（压缩）为 $\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，其相对伸长（压缩）为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，即 x 点处的应变为 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$。若略去垂直杆长方向的形变，根据 Hooke 定律，应力与应变 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 成正比，即

$$P=E\frac{\partial u}{\partial x}$$

比例系数 E 称为杆的杨氏模量，故所求的纵振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$。

4. 一均匀杆原长为 l，一端固定，另一端沿杆的轴线方向被拉长 e 而静止，突然放手任其振动，试建立振动方程与定解条件。

解　该问题为杆的纵振动问题，由题 3 已知杆的纵振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0<x<l,t>0)$$

杆的一端固定，设此端为 $x=0$ 处，则有 $u(0,t)=0$。

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

另一端($x=l$)放手后就为自由端,也就是在振动过程中不受外力作用,故有

$$u_x(l,t)=0$$

边值条件已经确定,下面考虑初始条件。由于弦初始时刻处于静止状态,即初速度为0,故$u_t(x,0)=0$。而在$t=0$时,整个杆被纵向拉长e,则单位杆长的伸长为$\frac{e}{l}$,故x点处的伸长为$\frac{e}{l}x$,即

$$u(x,0)=\frac{e}{l}x$$

初边值条件都已确定,也就得到了该振动的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l \quad t>0)\\ u(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0\\ u(x,0)=\dfrac{e}{l}x, \quad u_t(x,0)=0\end{cases}$$

5. 若$F(z)$,$G(z)$是任意两个二次连续可微函数,验证

$$u=F(x+at)+G(x-at)$$

满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

解 作自变量代换$\xi=x+at$,$\eta=x-at$,由复合函数求导法则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

题中所给函数$u=F(x+at)+G(x-at)$,经过变量代换后

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

即为 $u = F(\xi) + G(\eta)$，验证其是否满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$转化为验证其是否满足$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

由于F，G均为二次连续可微函数，形为$u = F(\xi) + G(\eta)$的函数u必满足$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，也即$u = F(x + at) + G(x - at)$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

6. 验证线性齐次方程的叠原理，即若$u_1(x, y)$，$u_2(x, y)$，…，$u_n(x, y)$，…，均为线性二阶齐次方程

2.4　习题全解

1. 设弦的两端固定于$x = 0$及$x = l$，弦的初始位称如图 2-2 所示，初速度为零，又设有外力作用，求弦作横向振动时的位移函数$u(x, t)$。

解　如图 2-2 所示，弦作横向振动时初始条件为

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

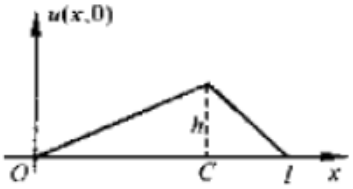


图 2-2

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x & (0\leqslant x\leqslant c)\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x) & (c<x\leqslant l)\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=0$$

则 $u(x,t)$ 是下列定解问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

该定解问题的解的形式是熟知的，其解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由初始条件

$$\psi(x)=0$$

故 $B_n=0$，而由初始条件

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

得

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^c\frac{h}{c}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\frac{2}{l}\int_c^l\frac{h}{l-c}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2hl^2}{\pi^2(l-c)cn^2}\sin\frac{n\pi c}{l}$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

$$B_n = 0$$

所以

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{an\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

2. 就下列初始条件及边界条件，解弦振动方程。

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x(l-x)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

解 $u(x,t)$ 是下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x(l-x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

的解，该定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

由初始条件来确定系数 A_n、B_n，由于

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \\ u_t(x,0) = \frac{l}{an\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = x(l-x) \end{cases}$$

故

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx =$$

$$\frac{2}{an\pi} \left[l \int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx - \int_0^l x^2 \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \right] =$$

$$\frac{4l^3}{n^3 \pi^3 a} (1 - \cos n\pi)$$

所以 $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^3}{n^4 \pi^4 a} [1 - (-1)^n] \sin \frac{an\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园！

3. 就下列初始条件及边界条件解弦振动方程。

$$u\mid_{t=0}=\begin{cases}x & (0<x\leqslant\frac{1}{2})\\ 1-x & (\frac{1}{2}<x<1)\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x(x-1)$$

$$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0$$

解　$u(x,t)$ 为下列定解问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<1,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

这里　$$\varphi(x)=\begin{cases}x & (0<x\leqslant\frac{1}{2})\\ 1-x & (\frac{1}{2}<x<1)\end{cases}$$

$$\psi(x)=x(x-1)$$

该定解问题的边界条件仍为第一类的，其解的形式为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中　$$A_n=2\int_0^l\varphi(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin n\pi x\mathrm{d}x+2\int_{1/2}^1(1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^1\psi(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{an\pi}\int_0^1x(1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\frac{4}{n^4\pi^4 a}[(-1)^n-1]$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos an\pi t+\frac{4}{n^4\pi^4 a}[(-1)^n-1]\sin an\pi t\right\}\sin n\pi x$$

4. 解出习题一中第 3 题(参阅 1.4 之 2 题)。

解 要求解的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=\varphi(x)=0\\ u_t(x,0)=\psi(x)=\begin{cases}0 & (|x-c|>\delta)\\ \dfrac{k}{2\delta\rho} & (|x-c|\leqslant\delta)\end{cases} & (\delta\to 0)\end{cases}$$

该边界条件为第一类的,故此定解问题的级数形式的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$A_n=0$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{an\pi}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{k}{2\delta\rho}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{k}{an\pi\delta\rho}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2k}{n^2\pi^2 a\delta\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}$$

$$\Rightarrow\lim_{\delta\to 0}\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\frac{\sin\frac{n\pi\delta}{l}}{\frac{n\pi\delta}{l}}=\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

5. 试求适合于下列初始条件及边界条件的一维热传导方程的解。

$$u|_{t=0}=x(l-x)$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$$

解 设 $u(x,t)$ 为题设定解问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=x(l-x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

的解，由于边界的解条件为第一类的，其级数形式的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

下面由初始条件确定 C_n。

由于 $$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=x(l-x)$$

故 $$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l lx\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx-\frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{4l^2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$$

所以

$$u(x,t)=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

6. 解一维热传导方程，其初始条件及边界条件为

$$u\Big|_{t=0}=x,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

解 依题意写出定解问题如下：

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

用分离变量法求解，令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程和边界条件得

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda x = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

由例1的讨论知，由式(2)，(3)或构成的固有值问题对应的固有值为

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

相应的固有函数为

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

将 λ 代入式(1)得

$$T_n(t) = \begin{cases} C_0 & (n = 0) \\ C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t} & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

于是定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t} \cos \frac{n\pi}{l} x$$

由初始条件知

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{l} x = x$$

故有

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x \mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi}{l} x \, \mathrm{d}x = \frac{2l}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t} \cos \frac{n\pi}{l} x$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

7. 一根长为 l 的细杆表面绝缘，其初始温度分布如图 2-3 所示，由 $t=0$ 开始两端温度保持于零度，求杆上温度分布。

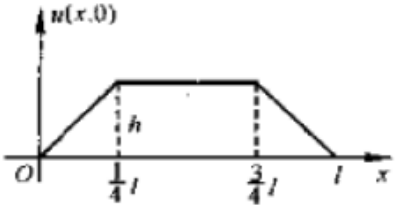


图 2-3

解 设杆上温度分布为 $u(x,t)$，依题意它满足下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{4h}{l}x & (0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}l) \\ h & (\dfrac{1}{4}l < x \leqslant \dfrac{3}{4}l) \\ \dfrac{4h}{l}(l-x) & (\dfrac{3}{4}l < x < l) \end{cases} \end{cases}$$

该定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{1}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{4}l} \frac{4h}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \frac{2h}{l}\int_{\frac{1}{4}l}^{\frac{3}{4}l} \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx +$$

$$\frac{2}{l}\int_{\frac{3}{4}l}^{l} \frac{4h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{8h}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{3n\pi}{4}\right) =$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园！

$$\frac{16h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}=$$

$$\begin{cases}0 & (n=2k)\\ \dfrac{16h}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4} & (n=2k+1)\end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

将 C_n 代入式(1)中，得

$$u(x,t)=\frac{8\sqrt{2}h}{\pi^2}\left[e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi}{l}x+\frac{1}{9}e^{-\frac{9a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{3\pi}{l}x-\right.$$

$$\left.\frac{1}{25}e^{-\frac{25a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{5\pi}{l}x-\frac{1}{49}e^{-\frac{49a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{7\pi}{l}x+\cdots\right]$$

8. 试解出具有放射衰变的热传导方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial u}{\partial t}+Ae^{-\alpha t}=0$$

已知边界条件为 $u\Big|_{x=0}=0$，$u\Big|_{x=l}=0$，初始条件为 $u\Big|_{t=0}=T$(常数)

解　题述定解问题为

$$\begin{cases}u_t-\dfrac{1}{a^2}u_{xx}-\dfrac{A}{a^2}e^{-\alpha t}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=T(\text{常数})\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

令其中 $\dfrac{1}{a}=b$，则上面的定解问题化为

$$(\text{I})\begin{cases}u_t-b^2u_{xx}=Ab^2e^{-\alpha t}\ (0<x<l,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=T\end{cases}\qquad(1)$$

解上述定解问题(Ⅰ)，可采用以下的三种方法：

解法1 注意到非齐次项 $Ab^2e^{-\alpha t}$ 只是 x 的函数，故可作一个代换将方程化为齐次的，并保留边界条件仍是齐次的，这时只需找一个只与 x 有关的函数 $v(x)$，使满足 $u(x,t)=w(x,t)+v(x)$，其中 $w(x,t)$ 的方程是齐次的。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

现用下面的方法确定 $v(x)$，把 $u = w + v$ 代入方程(1)，并使 $w(x,t)$ 的方程是齐次的，于是有

$$w_t - b^2 w_{xx} = Ab^2 e^{-\alpha x} + b^2 v''(x) = 0$$

因此

$$v''(x) = -Ae^{-\alpha x}$$

由此得

$$v(x) = -\frac{1}{\alpha^2} Ae^{-\alpha x} + Bx + C$$

其中 B、C 为任意常数，关于新的未知函数 $w(x,t)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} w_t - b^2 w_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = \frac{1}{\alpha^2} A - C \\ w(l,t) = \frac{1}{\alpha^2} Ae^{-\alpha l} - Bl - C \\ w(x,0) = T + \frac{1}{\alpha^2} Ae^{-\alpha x} - Bx - C \end{cases}$$

为使边界条件齐次化，只须

$$\frac{1}{\alpha^2} A - C = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2} Ae^{-\alpha l} - Bl - C = 0$$

解之得

$$\begin{cases} B = \frac{1}{\alpha^2} A \\ C = \frac{A(e^{-\alpha l} - 1)}{\alpha^2 l} \end{cases}$$

故

$$v(x) = -\frac{A}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha x} - \frac{x}{l}(e^{-\alpha l} - 1) - 1\right]$$

从而 $w(x,t)$ 的定解问题化为

$$(\text{II}) \begin{cases} w_t - b^2 w_{xx} = 0 \qquad (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) = T + \frac{A}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha x} - \frac{x}{l}(e^{-\alpha l} - 1) - 1\right] \end{cases}$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

（Ⅱ）的定解问题级数形式的解是熟知的，为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l\left\{T+\frac{A}{\alpha^2}[e^{-\alpha t}-\frac{x}{l}(e^{-\alpha l}-1)-1]\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\frac{2}{l}\int_0^l\frac{A}{\alpha^2}[e^{-\alpha x}-$$

$$\frac{x}{l}(e^{-\alpha l}-1)-1]\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2A(1-e^{-\alpha l}\cos n\pi)l^2}{n\pi(\alpha^2 l^2+n^2\pi^2)}$$

因此

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x)=-\frac{A}{\alpha^2}[e^{-\alpha x}-$$

$$\frac{x}{l}(e^{-\alpha l}-1)-1]+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

解法 2　用固有函数展开法求解，本题中固有函数集为

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

故可令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再将 $Ab^2e^{-\alpha x}$ 和 T 在$[0,l]$上也用$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$作为基本函数族展开成傅里叶级数

$$Ab^2e^{-\alpha x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

其中 $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l Ab^2e^{-at}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2Ab^2n\pi}{a^2l^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^ne^{-al}]$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

将 $u(x,t)$，Ab^2e^{-at} 的级数展开式代入非齐次方程，得 $T(t)$ 所满足的常微分方程

$$\begin{cases}T'_n(t)+\frac{n^2\pi^2b^2}{l^2}T_n=C_n\\T_n(0)=\varphi_n\end{cases}$$

解之得

$$T_n(t)=[\varphi_n-(\frac{l}{n\pi b})^2C_n]e^{-(\frac{n\pi b}{l})^2t}+(\frac{l}{n\pi b})^2C_n$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_n-(\frac{l}{n\pi b})^2C_n\right]e^{-(\frac{n\pi b}{l})^2t}+(\frac{l}{n\pi b})^2C_n\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2Al^2[1-(-1)^ne^{-al}]}{n\pi(a^2l^2+n^2\pi^2)}\right\}\cdot$$

$$e^{-(\frac{n\pi b}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^ne^{-al}]}{n\pi(a^2l^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

解法 3　利用线性叠加原理，把定解问题（Ⅰ）的解表示成

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中 $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 分别是定解问题

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}v_t-b^2v_{xx}=0\\v(0,t)=v(l,t)=0\\v(x,0)=\varphi(x)=T\end{cases}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}w_t-b^2w_{xx}=Ab^2e^{-at}\\w(0,t)=w(l,t)=0\\w(x,0)=0\end{cases}$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

的解，其中定解问题（Ⅱ）的解是熟知的，为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi b}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2T}{l}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

求解定解问题（Ⅲ），我们采用齐次化原理，为此我们先求解

$$\begin{cases}h_t-b^2h_{xx}=0\\ h\mid_{x=0}=h\mid_{x=l}=0\\ h\mid_{t=\tau}=Ab^2e^{-ax}\end{cases}$$

该定解问题的解为

$$h(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\tau)e^{-(\frac{n\pi}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$A_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l Ab^2e^{-ax}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2Ab^2n\pi}{a^2l^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^ne^{-al}]$$

故定解问题（Ⅲ）的解为

$$w(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)\,d\tau=$$

$$\int_0^t\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab^2n\pi}{a^2l^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^ne^{-al}]e^{-(\frac{n\pi}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}d\tau=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^ne^{-al}]}{n\pi(a^2l^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x[1-e^{-(\frac{n\pi}{l})^2t}]$$

所以

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2Al^2[1-(-1)^ne^{-al}]}{n\pi(a^2l^2+n^2\pi^2)}\right\}e^{-(\frac{n\pi}{l})^2t}$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-a^2}]}{n\pi(a^2l^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

9. 求下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A\\ u\mid_{x=0}=u\mid_{x=l}=0\\ u\mid_{t=0}=0\end{cases}$$

解 求解该定解问题，采用上题中的解法 1，令 $u(x,t)=w(x,t)+v(x)$，代入泛定方程，并使得 $w(x,t)$ 的方程是齐次的，于是有

$$w_t-a^2w_{xx}=a^2v_{xx}+A=0$$

因此

$$v_{xx}=-\frac{A}{a^2}$$

令

$$v(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+Bx+C$$

依边界条件知

$$w(0,t)=u(0,t)-v(0,t)=-C$$

$$w(l,t)=u(l,t)-v(l,t)=\frac{Al}{2a^2}-Bl-C$$

为使 $w(x,t)$ 的边界条件为边齐次的，只需

$$C=0,B=\frac{Al}{2a^2}$$

所以

$$v(x)=-\frac{A}{2a^2}(x^2-lx)$$

故关于 $w(x,t)$ 的定解问题为

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=\dfrac{A}{2a^2}x^2-\dfrac{Al}{2a^2}x=\varphi(x)\end{cases}$$

定解问题(Ⅰ)的级数形式的解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l \frac{A}{2a^2}(x^2 - lx)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{1}{l}\int_0^l \frac{A}{a^2}x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx - \frac{A}{a^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}[(-1)^n - 1]$$

所以

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) = -\frac{A}{2a^2}(x^2 - lx) +$$

$$\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

10. 求满足下列定解条件的一维热传导方程的解。

$u(0,t) = 0, u(l,t) = 5$

$u(x,0) = kx$

解　所求解的定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 10, u(l,t) = 5 \\ u(x,0) = kx \end{cases}$$

其边界条件是非齐次的，且均为常数，为将边界条件齐次化，令

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

把它代入原定解问题得

$$(\mathrm{I})\begin{cases} w_t - a^2w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = 10 - v(0) \\ w(l,t) = 5 - v(l) \\ w(x,0) = kx - v(x) \end{cases}$$

为使边界条件也为齐次的，$v(x)$ 须满足

$$v(0) = 10, v(l) = 5$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

这时只要取

$$v(x)=10+\frac{x}{l}[5-10]=10-\frac{5x}{l}$$

于是定解问题(Ⅰ)可化为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=(k+\dfrac{5}{l}x)-10=\varphi(x)\end{cases}$$

而定解问题(Ⅱ)的级数形式的解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l[(k+\frac{5}{l}x)-10]\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2(kl+5)}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx-\frac{20}{l}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2}{n\pi}[(-1)^n(5-kl)-10]$$

所以

$$u(x,t)=v(x)+w(x,t)=$$

$$10-\frac{5x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5-kl)-10}{n}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

1). 试确定下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x)\\ u|_{x=0}=A,u|_{x=l}=B\\ u|_{t=0}=g(x)\end{cases}$$

的解。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

解 由题 10，令 $v(x)=A+\frac{x}{l}(B-A)$

$$u(x,t)=A+\frac{x}{l}(B-A)+w(x,t)$$

则新的未知函数 $w(x,t)$ 满足下列定解问题

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} w_t-a^2w_{xx}=f(x) & (0<x<l,t>0) \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \\ w(x,0)=g(x)-A+\frac{x}{l}(A-B) \end{cases} \tag{1}$$

由于自由项仅为 x 的函数，依题 8 中解法 1，找一个只关于 x 的函数 $P(x)$ 使得

$$w(x,t)=h(x,t)+P(x) \tag{2}$$

将(2)式代入泛定方程(1)，并使 $h(x,t)$ 的方程是齐次的，于是有

$$h_t-a^2h_{xx}=a^2P_{xx}+f(x)=0$$

因此

$$P_{xx}(x)=-\frac{f(x)}{a^2}$$

故由初始条件知关于 $h(x,t)$ 的定解问题为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} h_t-a^2h_{xx}=0 \\ h(0,t)=-P(0),h(l,t)=-P(l) \\ h(x,0)=g(x)-A+\frac{x}{l}(A-B)-P(x) \end{cases}$$

将定解问题(Ⅱ)的边界条件齐次化得

$$P(0)=0,P(l)=0$$

令 $F(x)$ 为 $-\frac{f(x)}{a^2}$ 的二次积分形式，故 $P(x)$ 可表示成

$$P(x)=F(x)+\frac{F(0)-F(l)}{l}x-F(0)$$

于是定解问题(Ⅱ)化为

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$\begin{cases} h_\tau - a^2 h_{xx} = 0 \\ h(0,t) = h(l,t) = 0 \\ h(x,0) = g(x) - A + \dfrac{x}{l}(A-B) - F(x) + F(0) - \\ \qquad \dfrac{F(0) - F(l)}{l}x = \varphi(x) \end{cases}$$

此定解问题级数形式的解为

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

所以原定解问题的解

$$u(x,t) = A + \frac{x}{l}(B-A) + w(x,t) =$$

$$A + \frac{x}{l}(B-A) + P(x) + h(x,t) =$$

$$A + \frac{x}{l}(B-A) + F(x) + \frac{F(0) - F(l)}{l}x - F(0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\tau\,d\tau\right]e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\varphi(\tau) = g(\tau) - A + \frac{\tau}{l}(A-B) - F(\tau) + F(0) - \frac{F(0) - F(l)}{l}\tau$$

$F(\tau)$ 为 $-\dfrac{f(\tau)}{a^2}$ 的二次积分形式。

12. 求稳恒状态下，由直线 $x = 0, x = l, 0, y = l_2$ 所围矩形板内各点的温度，假设 $x = 0, x = l$ 及 $y = 0$ 三边上温度保持为零度，$y = l_2$ 这边上各点温度为 $\varphi(x)$，其中 $\varphi(0) = \varphi(l_1) = 0$.

解　设该矩形板的温度分布为 $u(x,y)$，则 $u(x,y)$ 是如下定解问题的解：

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$(\text{I})\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & (0 < x < l_1, 0 < y < l_2)\\ u(0,y) = 0, u(l,y) = 0 & (0 \leqslant y \leqslant l_2)\\ u(x,0) = 0, u(x,l_2) = \varphi(x) & (0 \leqslant x \leqslant l_1)\end{cases}$$

由分离变量法，令 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ 代入泛定方程及齐次边界条件，分离变量后得

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases}X'' + \lambda X = 0 & (2)\\ X(0) = 0, X(l_1) = 0 & (3)\end{cases}$$

式(2)，(3) 构成的固有值问题，对应的固有值为

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l_1^2} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l_1}x$$

求解方程(1) 得

$$Y_n(y) = A_n\cosh\frac{n\pi}{l_1}y + B_n\sinh\frac{n\pi}{l_1}y$$

所以定解问题(Ⅰ) 的解可表示为

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{l_1}y + B_n\sinh\frac{n\pi}{l_1}y\right)\sin\frac{n\pi}{l_1}x$$

依初始条件知

$$\begin{cases}u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\sin\dfrac{n\pi}{l_1}x = 0\\ u(x,l_2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\sinh\dfrac{n\pi l_2}{l_1}\sin\dfrac{n\pi}{l_1}x = \varphi(x)\end{cases}$$

因此

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{\varphi(x)}{\sinh\dfrac{n\pi l_2}{l_1}}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\,dx =$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\frac{2}{l_1 \sinh \frac{n\pi l_2}{l_1}} \int_0^{l_1} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l_1} x \mathrm{d}x$$

所以

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l_1 \sinh \frac{n\pi l_2}{l_1}} \int_0^{l_1} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l_1} x \mathrm{d}x \right] \sin \frac{n\pi}{l_1} x \sinh \frac{n\pi}{l_1} y$$

13. 一半径为 a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持 $u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta)$，而直径边界上温度保持为零度，板的侧面绝缘，试求稳恒状态下的温度分布规律 $u(\rho,\theta)$。

解 依题意，$u(\rho,\theta)$ 应满足下列定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & (0 < \theta < \pi, 0 \leqslant \rho < a) \\ u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta) & (0 < \theta < \pi) \\ u(\rho,0) = 0, u(\rho,\pi) = 0 & (0 \leqslant \rho \leqslant a) \\ |\, u(0,\theta)\,| < +\infty & (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \end{cases}$$

由分离变量法，令 $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Phi(\theta)$，代入泛定方程以及边界条件，分离变量后得

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 & (0 < \theta < \pi) \quad (1) \\ \Phi(0) = 0, \Phi(\pi) = 0 & (2) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 & (0 < \rho < a) \\ |\, R(0)\,| < +\infty \end{cases} \quad (3)$$

由式(1)，(2) 构成的固有值问题是熟知的，其固有值为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

固有函数为 $\Phi_n(\theta) = \sin n\theta$

求解方程(3)，此方程为欧拉方程，只要令 $t = \ln\rho$ 或 $\rho = \mathrm{e}^t$，则式(3) 可化为关于自变量 t 的常系数方程，解之得

$$R_n(\rho) = a_n\rho^n + b_n\rho^{-n} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

为了保证 $|\, R(0)\,| < +\infty$，只有 $b_n = 0$，即 $R_n(\rho) = a_n\rho^n$，

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

所以原定解问题级数形式的解为

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\rho^n\sin n\theta$$

由初始条件知

$$u(a,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n a^n\sin n\theta=T\theta(\pi-\theta)$$

因此

$$C_n=\frac{2}{\pi a^n}\int_0^{\pi}T\theta(\pi-\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{2T}{a^n}\int_0^{\pi}\theta\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{T}{\pi a^n}\int_0^{\pi}\theta^2\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$-\frac{2T}{na^n}\int_0^{\pi}\theta\,\mathrm{d}\cos n\theta+\frac{T}{an\pi^n}\int_0^{\pi}\theta^2\,\mathrm{d}\cos n\theta=$$

$$-\frac{2T}{na^n}\left[\theta\cos n\theta\int_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta\right]+\frac{2T}{an\pi^n}\left[\theta^2\cos n\theta\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.2\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta\right]=\frac{4T}{\pi n^3a^n}[1-(-1)^n]$$

所以

$$u(\rho,\theta)=\frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n^3a^n}[1-(-1)^n]\sin n\theta$$

14. 一圆环形平板，内半径为 r_1，外半径为 r_2，侧面绝缘，如内圆温度保持零度，外圆温度保持 1 度，试求稳恒状态下的温度分布规律 $u(r,\theta)$。

解 设温度分布为 $u(r,\theta)$，其应满足如下定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2u=0 & (r_1<r<r_2,0\leqslant\theta\leqslant2\pi)\\ u(r_1,\theta)=f_1(\theta)=0,u(r_2,\theta)=f_2(\theta)=1 & (1)\\ u(r,\theta+2\pi)=u(r,\theta)\end{cases}$$

由分离变量法，令 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，代入泛定方程(1)式以及边界条件和周期性条件，分离变量后得

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 & (2)\\ \Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta) & (3)\end{cases}$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

及
$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 & (4) \\ R(r_1) = 0 & (5) \end{cases}$$

(2),(3)式构成的固有值问题的固有值为 $\lambda = n^2$ $(\lambda = 0,1,2,\cdots)$ 固有函数为

$$\Phi_n(\theta) = \begin{cases} a_0 \quad (\text{常值}) & (n = 0) \\ a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

解方程(4)得

$$R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0\ln r & (n = 0) \\ c_n r^n + d_n r^{-n} & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

所以原定解问题级数形式的解为

$$u(r,\theta) = c_0 + d_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)(c_n r^n + d_n r^{-n})$$

或写成

$$u(r,\theta) = c_0 + d_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}[(A_n r^n + B_n r^{-n})\cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n})\sin n\theta]$$

其中 $c_0, d_0, A_n, B_n, C_n, D_n$ 均为常数。

由边值条件知

$$c_0 + d_0\ln r_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r_1^n + B_n r_1^{-n})\cos n\theta + (C_n r_1^n + D_n r_1^{-n})\sin n\theta] = f_1(\theta)$$

$$c_0 + d_0\ln r_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r_2^n + B_n r_2^{-n})\cos n\theta + (C_n r_2^n + D_n r_2^{-n})\sin n\theta] = f_2(\theta)$$

将 $f_1(\theta), f_2(\theta)$ 分别按余弦函数族$\{\cos n\theta\}$ 以及正弦函数族$\{\sin n\theta\}$ 在$[0,2\pi]$展开成傅里叶级数,得

$$\begin{cases} c_0 + d_0\ln r_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \\ c_0 + d_0\ln r_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1 \end{cases}$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

以及
$$\begin{cases} A_n r_1^n + B_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0 \\ A_n r_2^n + B_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\cos n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_n r_1^n + D_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0 \\ C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\sin n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0 \end{cases}$$

因此解得

$$c_0 = -\frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, d_0 = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, A_n = B_n = C_n = D_n = 0$$

于是板的稳恒温度分布为

$$u(r,\theta) = -\frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\ln r = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\ln \frac{r}{r_1}$$

15. 如何解下列定解问题。

15. 如何解下列定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \\ u\big|_{x=0} = M_1, u\big|_{x=l} = M_2 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解 令 $u(x,t)$ 为所求定解问题的解。利用叠加原理，考虑到泛定方程的自由项只是 x 的函数，令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$，这样可将定解问题分解为如下两个定解问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x), v_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a^2 w_{xx} + f(x) = 0 \\ w(0) = M_1, w(l) = M_2 \end{cases}$$

(Ⅰ) 的解是熟知的，为

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l[\varphi(x)-w(x)]\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\ B_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\end{cases}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x+w(x)$$

其中 $w(x)$ 由二阶常微分方程

$$\begin{cases}a^2w_{xx}+f(x)=0\\ w(0)=M_1,w(l)=M_2\end{cases}$$

所确定。

16. 在矩形域内求下列定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=f(x,y)\\ u\mid_{x=0}=\varphi_1(y),u\mid_{x=a}=\varphi_2(y)\\ u\mid_{y=0}=\psi_1(x),u\mid_{y=b}=\psi_2(x)\end{cases}$$

的解。

的解。

解　求解定解问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\nabla^2u=f(x,y)\quad(0<x<a,0<y<b)\\ u(0,y)=\varphi_1(y),u(a,y)=\varphi_2(y)\\ u(x,0)=\psi_1(x),u(x,b)=\psi_2(x)\end{cases}\tag{1}$$

必须将其中一组边界条件齐次化，这里我们将关于 x 的边界条件齐次化，为此令 $u(x,y)=w(x,y)+v(x,y)$，齐次化 w 关于 x 的边界条件只须取

$$v(0,y)=\varphi_1(y),v(a,y)=\varphi_2(y)$$

不妨设

$$v(x,y)=\varphi_1(y)+\frac{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)}{a}x$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

则

$$\nabla^2 v = \varphi''_1(y) + \frac{\varphi''_2(y) - \varphi''_1(y)}{a}x$$

故求解定解问题(Ⅰ)就转化为求解下面的定解问题：

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} \nabla^2 w = f(x,y) - [\varphi''_1(y) + \dfrac{\varphi''_2(y) - \varphi''_1(y)}{a}x] & (2) \\ w(0,y) = w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = \psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \dfrac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x] & (3) \\ w(x,b) = \psi_2(x) - [\varphi_1(b) + \dfrac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x] & (4) \end{cases}$$

用固有函数展开法来求解(Ⅱ)，(Ⅱ)对应的齐次方程定解问题的固有函数集为$\{\sin\frac{n\pi}{a}x\}(n = 1,2,3,\cdots)$。

故令

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (5)$$

将式(5)代入式(2)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f''_n(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}f_n(y)]\sin\frac{n\pi}{a}x = f(x,y) -$$

$$[\varphi''_1(y) + \frac{\varphi''_2(y) - \varphi''_1(y)}{a}x]$$

由初始条件知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)\sin\frac{n\pi}{a}x = \psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)\sin\frac{n\pi}{a}x = \psi_2(x) - [\varphi_1(b) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x]$$

故

$$f_n(0) = \frac{2}{a}\int_0^a \left\{\psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x]\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$f_n(b) = \frac{2}{a}\int_0^a \left\{\psi_1(x) - [\varphi_1(b) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x]\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

所以

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x+\varphi_1(y)+\frac{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)}{a}x$$

其中 $f_n(y)$ 由常微分方程

$$\begin{cases}f''_n(y)-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}f_n(y)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\left\{f(x,y)-\left[\varphi''_1(y)+\dfrac{\varphi''_2(y)-\varphi''_1(y)}{a}x\right]\right\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\\ f_n(0)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\left\{\psi_1(x)-\left[\varphi_1(0)+\dfrac{\varphi_2(0)-\varphi_1(0)}{a}x\right]\right\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\\ f_n(b)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\left\{\psi_2(x)-\left[\varphi_1(b)+\dfrac{\varphi_2(b)-\varphi_1(b)}{a}x\right]\right\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\end{cases}$$

确定。

17. 在扇形区域内求下列定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0 & (0<\rho<R,0<\theta<\alpha) \quad (1)\\ u(\rho,0)=u(\rho,\alpha)=0 & (0<\rho<R) \quad (2)\\ u(a,\theta)=f(\theta) & (3)\end{cases}$$

解 该定解问题的泛定方程和边界条件均为齐次的，用分离变量法求解，令

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta) \tag{4}$$

将其代入泛定方程(1)，分离变量后得

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{-R(\rho)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda$$

即

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \tag{5}$$

$$\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \tag{6}$$

将式(4)代入式(2)得

$$\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0 \tag{7}$$

注意到定解问题的物理意义，在 $\rho=0$ 处，应满足有界性条件，即

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

$$|u(0,\theta)|<+\infty$$

故

$$|R(0)|<+\infty \tag{8}$$

解式(6),(7)构成的固有值问题,其固有值为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{\alpha})^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

固有函数为 $\Phi_n(\theta)=\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$ $(n=1,2,\cdots)$

将λ代入式(5),式(5)是一个二阶齐次欧拉方程,在式(5)中令$\rho=e^t$,变换自变量为t得

$$\frac{d^2R_n}{dt^2}-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}R_n=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

其通解为

$$R_n(t)=C_ne^{\frac{n\pi}{\alpha}t}+D_ne^{-\frac{n\pi}{\alpha}t} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

故

$$R_n(\rho)=C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

由条件式(8)知D_n必为零,因此$R_n(\rho)=C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$。

于是该定解问题级数形式的解为

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \tag{9}$$

又由式(3)知

$$u(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta=f(\theta)$$

将$f(\theta)$在$[0,\alpha]$上按正弦函数族$\left\{\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\}$展开成Fourier级数,得

$$C_n=\frac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta d\theta \quad (n=1,2,\cdots)$$

代入式(9)即得原定解问题的解。

18. 在矩形域$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$内求拉普拉斯方程的解,使满足边界条件:

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$\begin{cases} u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=a}=ay \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=0 \end{cases}$$

解 上述问题写成定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u=0 & (0<x<a, 0<y<b) \\ u(0,y)=0, u(a,y)=Ay \\ u_y(x,0)=0, u_y(x,b)=0 \end{cases}$$

该定解问题关于 y 的边界条件为齐次的，由分离变量法，令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，将其代入泛定方程与所有的齐次边界条件，分离变量后得

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 & (1) \\ X(0)=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y''+\lambda=0 & (3) \\ Y'(0)=0, Y'(b)=0 & (4) \end{cases}$$

解 式(3)，(4)构成的固有值问题，其固有值为

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$Y_n(y)=\cos\frac{n\pi y}{b} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

将 λ_n 代入式(1)中解得

$$X_n(x)=\begin{cases} A_0+B_0x & (n=0) \\ A_n\cosh\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\sinh\dfrac{n\pi}{b}x & (n\neq 0) \end{cases}$$

由 $X_n(0)=0$，知 $A_0=0, A_n=0$，所以

$$X_n(x)=\begin{cases} B_0x & (n=0) \\ B_n\sinh\dfrac{n\pi}{b}x & (n\neq 0) \end{cases}$$

故原定解问题级数形式的解为

$$u(x,y)=B_0x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

又由非齐次边界条件知

$$u(a,y)=B_0a+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{b}a\cos\frac{n\pi}{b}y=Ay$$

将 Ay 在 $[0,b]$ 上展开成余弦 Fourier 级数，得

$$B_0=\frac{1}{ab}\int_0^b Ay\,dy=\frac{Ab}{2a}$$

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^b\frac{Ay}{\sinh\frac{an\pi}{b}}\cos\frac{n\pi}{b}y\,dy=\frac{2Ab}{n^2\pi^2\sinh\frac{an\pi}{b}}(\cos n\pi-1)$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,y)=\frac{Ab}{2a}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2\sinh\frac{an\pi}{b}}\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

19. 把高频输电线充电到具有电压 E，然后一端短路封闭，另一端保持断开，求以后的电压分布。

解 由教材 §1.1 中导出的高频传输线方程知，电压 u 应满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

考虑边值条件，设在 $x=0$ 处短路，故 $x=0$ 处的电位为零，即 $u(0,t)=0$。另端 $x=l$ 处断开，故这端通过的电流为零，由教材 §1.1 中(1.4)式知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-L\frac{\partial i}{\partial t}(\text{电导与电阻产生的效应忽略不计})$$

因此

$$u_x(l,t)=0$$

对于初始条件，显然有 $u(x,0)=E$，另外由于初始时刻传输线上电流应为 0，故由教材 §1.1 中(1.5)式知

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-c\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

也即

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$u_t(x,0)=0$$

所以电压 $u(x,t)$ 应为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(0,t)=0,u_x(l,t)=0\\ u(x,0)=E,u_t(x,0)=-0\end{cases}$$

的解，下面由分离变量法来求解（Ⅰ），令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入（Ⅰ）的泛定方程及齐次边界条件，分离变量后得

$$T''+\lambda^2a^2T=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0 & (2)\\ X(0)=0,X''(l)=0 & (3)\end{cases}$$

解式(2)，(3) 构成的固有值问题，其固有值为

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

将 λ_n 代入式(1) 中解得

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t$$

所以定解问题（Ⅰ）的解的结构为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

由初始条件知

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x=E\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x=0\end{cases}$$

故

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l E\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}\mathrm{d}x = \frac{4E}{(2n+1)\pi}$$

$$B_n = 0$$

所以电压分布

$$u(x,t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

20. 求解矩形膜振动的位移，即解下列定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=a} = 0\\ u\mid_{y=0} = u\mid_{y=b} = 0\\ u\mid_{t=0} = xy(x-a)(y-b), \dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = 0\end{cases}$$

解　该定解问题是一个二维波动方程的初边值问题，其中泛定方程与边界条件均为齐次的，同样也可采用分离变量法来求解。与一维情形不同的是，需要经过两次分离变量。

先令 $u(x,y) = T(t)V(x,y)$ 将其代入泛定方程以及所有的齐次边界条件得

$$\frac{T''}{T} = \frac{V_{xx}+V_{yy}}{v} = -\lambda^2$$

即

$$\begin{cases}T'' + \lambda^2 T = 0 & (1)\\ V_{xx} + V_{yy} + \lambda^2 V = 0 & (2)\end{cases}$$

以及

$$V(x,0) = 0, V(x,b) = 0 \quad (3)$$

$$V(0,y) = 0, V(a,y) = 0 \quad (4)$$

再令 $V(x,y) = X(x)Y(y)$，分别代入(2)，(3)，(4)式中分离变量得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''+\lambda^2 Y}{Y} = -\mu^2$$

且　　$X(0) = X(a) = 0, Y(0) = Y(b) = 0$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

这样就得了两个固有值问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases} X''+\mu^2=0 \\ X(0)=0, X(a)=0 \end{cases} \quad \text{和}(\mathrm{II})\begin{cases} Y''+(\lambda^2-\mu^2)=0 \\ Y(0)=Y(b)=0 \end{cases}$$

而(Ⅰ)和(Ⅱ)对应的固有问题的解分别为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \left(\mu^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}, n=1,2,\cdots\right)$$

$$Y_m(y)=\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad \left(\lambda^2-\mu^2=\frac{m^2\pi^2}{b^2}, m=1,2,\cdots\right)$$

故由(2),(3),(4)式构成的固有值问题对应的固有值为

$$\lambda_{m,n}^2=\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 \quad (m,n=1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$V_{m,n}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

解关于 T 的方程(1)得

$$T_{m,n}(t)=A_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t+B_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t$$

故原定解问题解的形式为

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t+$$

$$B_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

由初始条件知

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi y}{b}=xy(x-a)(y-b) \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_{m,n}B_{m,n}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi}{b}y=0\Rightarrow B_{m,n}=0 \end{cases}$$

利用固有函数系的正交性,得

$$A_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b xy(x-a)(y-b)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{16a^2b^2}{n^3m^3\pi^6}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

所以

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\cos\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}}{ab}\pi t$$

其中 $A_{m,n}=\dfrac{16a^2b^2}{n^3m^3\pi^5}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$

21. 证明教材 §2.2 中所得的固有函数系 $\{\sin\beta_n x\}(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,l]$ 上是正交系，即

$$\int_0^l \sin\beta_m x\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x=0\qquad(m\neq n)$$

其中 β_n 满足 $\beta_n\sin\beta_n l+h\cos\beta_n l=0$，$h$ 为常数。

证　设 X_m 和 X_n 分别是对应于固有值 $\lambda=\beta_m^2$ 和 $\lambda=\beta_n^2$ 的固有函数，也即 $X_m(x)=\sin\beta_m x$，$X_n(x)=\sin\beta_n x$，于是有

$$X''_m+\beta_m^2X_m=0 \tag{1}$$

$$X''_n+\beta_n^2X_n=0 \tag{2}$$

用 X_n 和 X_m 分别乘以(1)式和(2)式然后将所得两式相减，继而在 $[0,l]$ 上积分得

$$(\beta_m^2-\beta_n^2)\int_0^l X_nX_m\,\mathrm{d}x=\int_0^l(X_mX''_n-X_nX''_m)\,\mathrm{d}x=$$

$$X_mX'_n-X_nX'_m\Big|_0^l=$$

$$X_m(l)X'_n(l)-X_n(l)X'_m(l)=$$

$$X_m(l)(-hX_n(l))-X_n(l)(-hX_m(l))=0 \tag{3}$$

(3)式中用到教材 §2.2 中的(2.17)式。

因 $m\neq n$，故 $\beta_m^2\neq\beta_n^2$，从而得正交性

$$\int_0^l X_mX_n\,\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\beta_m x\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x=0\qquad(m\neq n)$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

3.4 习题全解

1. 求方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \tag{1}$$

满足边界条件 $$u|_{y=0} = x^2 \tag{2}$$

$$u|_{x=1} = \cos y \tag{3}$$

的解。

解 方法 1 对(1)式两端积分得通解

$$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \tag{4}$$

其中 $\varphi_1(y), \varphi_2(x)$ 为任意二阶可微函数

由式(2),(3)得

$$\begin{cases} \varphi_1(0) + \varphi_2(x) = x^2 \\ \frac{y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(1) = \cos y \end{cases}$$

解得 $$\varphi_1(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - 1 + \varphi_1(0)$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \varphi_1(0)$$

代入式(4)得

$$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} - \frac{y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1$$

方法 2 以 $\tilde{u}(x,s)$ 记 $u(x,y)$ 关于变量 y 的拉普拉斯变换，即

$$\tilde{u}(x,s) = \int_0^{+\infty} u(x,y) e^{-sy} \, dy$$

对式(1)关于 y 取拉普拉斯变换，并利用微分性质得

$$s\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = \frac{x^2}{s^2} \tag{5}$$

由式(2)得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = 2x$$

代入式(5)得

$$s\frac{d\tilde{u}}{dx} - 2x = \frac{x^2}{s^2} \tag{6}$$

对式(3)关于 y 取拉普拉斯变换得

$$\left.\tilde{u}(x,s)\right|_{x=1} = \frac{s}{s^2+1} \tag{7}$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

式(6)与(7)联立解得

$$\tilde{u}(x,s)=\frac{x^3}{3s^3}+\frac{x^2}{s}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}-\frac{1}{3s^3}$$

取逆变换得

$$u(x,y)=\frac{x^3y^2}{6}+x^2+\cos y-1-\frac{y^2}{6}$$

2. 求解波动方程的初值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=t\sin x\\ u\mid_{t=0}=0,\quad u_t\mid_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

解　方法 1：$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\tau d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin\xi d\xi=$

$$\frac{1}{2}[\cos(x-t)-\cos(x+t)-\int_0^t\tau\cos(x-t+\tau)d\tau-\int_0^t\tau\cos(x+t-\tau)d\tau]=$$

$$t\sin x$$

方法 2：用傅里叶变换法。

$$\tilde{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

对方程及初始条件关于变量 x 取傅里叶变换，得

$$\begin{cases}\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}=-\omega^2\tilde{u}+i\pi t[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\\ \tilde{u}\mid_{t=0}=0\\ \left.\frac{d\tilde{u}}{dt}\right|_{t=0}=i\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\end{cases}$$

解之得

$$\tilde{u}(\omega,t)=\frac{i\pi}{\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]t+$$

$$\frac{i\pi}{\omega}(1-\frac{1}{\omega^2})[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\sin\omega t$$

取傅里叶逆变换得

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$\frac{it}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]e^{i\omega x}d\omega+$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega =$$

$$\frac{t}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})]=t\sin x$$

3. 证明傅里叶变换的卷积定理。

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)$$

其中 $f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)]$，$f_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)]$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

证　因

$$\mathscr{F}_1[f_1(t)*f_2(t)]=\mathscr{F}_1\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi$$

令 $\xi'=x-\xi$，则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\xi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\xi+\xi')}\mathrm{d}\xi'\right]\mathrm{d}\xi=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\xi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi'}\mathrm{d}\xi'=$$

$$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

结论保证。

4. 证明见本章例 3－13。

5. 用积分变换法解下列问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1 & (x>0,y>0)\\ u|_{x=0}=y+1\\ u|_{y=0}=1\end{cases}$$

解　令

$$\bar{u}(s,y)=\int_0^{+\infty}u(x,y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

对泛定方程关于变量 x 取拉普拉斯变换得

$$\mathscr{L}[u_{xy}]=\frac{1}{s}$$

由拉普拉斯变换的定义及微分性质，有

$$\mathscr{L}[u_{xy}]=\int_0^{+\infty}u_{xy}(x,y)e^{-sx}dx=$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^{+\infty}u_x(x,y)e^{-sx}dx\right]=\frac{\partial}{\partial y}[\mathscr{L}[u_x]]=$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[s\mathscr{L}[u(x,y)]-u(0,y)]=$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[s\tilde{u}(s,y)-y-1]=s\frac{d\tilde{u}}{dy}-1$$

即得

$$s\frac{d\tilde{u}}{dy}-1=\frac{1}{s}$$

解之得 $\tilde{u}(s,y)=\frac{s+1}{s^2}y+c$

因 $\tilde{u}(s,0)=\int_0^{+\infty}u(x,0)e^{-sx}dx=\int_0^{+\infty}e^{-sx}dx=\frac{1}{s}$

所以可得

$$\tilde{u}(s,y)=\frac{s+1}{s^2}y+\frac{1}{s}$$

取逆变换得

$$u(x,y)=y\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=xy+y+1$$

6. 求上半平面内静电场的电位，即解下列定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0,y>0 & (1)\\ u|_{y=0}=f(x) & (2)\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}u=0 & (3)\end{cases}$$

解 记 $\tilde{u}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\omega x}dx$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

对式(1)两端关于变量 x 取傅里叶变换，结合微分性得

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dy^2}-\omega^2\tilde{u}=0$$

其通解为

$$\tilde{u}(\omega,y)=C_1e^{\omega y}+C_2e^{-\omega y} \tag{4}$$

对式(2)两端取傅里叶变换，得

$$\tilde{u}(\omega,0)=F(\omega) \tag{5}$$

由式(4)(5)得

$$\tilde{u}(\omega,y)=C_1e^{\omega y}+(F(\omega)-C_1)e^{-\omega y}$$

由式(3)得

$$\lim_{y\to+\infty}\tilde{u}(\omega,y)=0 \tag{6}$$

(ⅰ)当 $\omega=0$ 时，显然 $\tilde{u}(\omega,y)=F(\omega)$

(ⅱ)当 $\omega>0$ 时，若要满足(6)式须有 $C_1=0$，即

$$\tilde{u}(\omega,y)=F(\omega)e^{-\omega y}$$

(ⅲ)同理 $\omega<0$ 时，

$$\tilde{u}(\omega,y)=F(\omega)e^{\omega y}$$

综上知 $\tilde{u}(\omega,y)=F(\omega)e^{-|\omega|y}$ (7)

易知 $\mathscr{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}]=\dfrac{y}{\pi(y^2+x^2)}$

对式(7)取逆变换，由卷积定理得

$$u(x,y)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)e^{-|\omega|y}]=$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[f(x)]\cdot\mathscr{F}\left[\frac{y}{\pi(y^2+x^2)}\right]\right]=$$

$$f(x)*\frac{y}{\pi(y^2+x^2)}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+(x-\tau)^2}f(\tau)d\tau$$

7. 用积分变换法解下列定解问题：

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u\,|_{t=0} = u_0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u\,|_{x=l} = u \end{cases}$$

解 令 $\tilde{u}(x,s) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

对泛定方程关于 t 取拉普拉斯变换，结合微分性质得

$$s\tilde{u}(x,s) - u(x,0) = a^2\tilde{u}_{xx}(x,s)$$

由初始条件，得

$$a^2\tilde{u}_{xx}(x,s) - s\tilde{u}(x,s) = u_0$$

即 $$\tilde{u}_{xx}(x,s) - \frac{s}{a^2}\tilde{u}(x,s) = -\frac{u_0}{a^2}$$

看初始条件

$$\tilde{u}_x(0,s) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\Big|_{x=0} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\Big|_{x=0} =$$

$$\int_0^{+\infty} u_x(0,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = 0$$

$$\tilde{u}(l,s) = \int_0^{+\infty} u(l,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = u_1\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{u_1}{s}$$

求解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{s}{a^2}\tilde{u} = -\dfrac{u_0}{a^2} \\ \tilde{u}_x(0,t) = 0, \tilde{u}(l,t) = \dfrac{u_1}{s} \end{cases}$$

得 $$\tilde{u}(x,s) = \frac{u_0}{s} + \frac{u_1 - u_0}{s}\frac{\cosh\frac{\sqrt{s}}{a}x}{\cosh\frac{\sqrt{s}}{a}l}$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

4.4 习题全解

1. 见例 4－4。

2. 见例 4－1。

3. 见例 4－5。

4. 试定义平面上的格林函数，并导出平面上拉普拉斯方程狄里克雷问题的解。

解　上半平面上拉普拉斯方程狄里克雷问题为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & (y>0)\\ u\big|_{y=0} = f(x)\end{cases}$$

设 $M_0(x_0,y_0)$ 为上半平面上的任一点，利用格林函数的物理意义知：在 M_0 点处放一单位正电荷，M_0 关于 x 轴的对称点 M_1 处放一单位负电荷后上半平面上的点 M 处的电势即为格林函数 $G(M,M_0)$ 在 M 处的值（见图 4－2），即

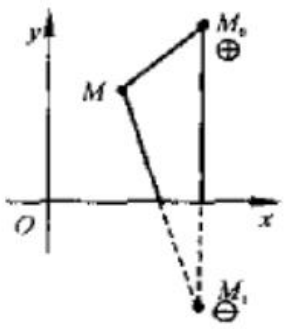


图 4－2

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - \ln\frac{1}{r_{M_1M}}\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln$$

$$\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

又

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

由例 4－9 的结果即得定解问题（Ⅰ）的解为

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)\mathrm{d}x$$

5. 见例 4－9，例 4－10。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

5.4 习题全解

1. 当 n 为正整数时，讨论 $J_n(x)$ 的收敛范围。

解 当 n 为正整数时：

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!(n+m)!}$$

对取定 x，级数通项为：

$$a_m=(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!(n+m)!}$$

计算得

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|=0$$

由达朗贝尔判别法知该级数在整个数轴上收敛。

2. 写出 $J_0(x)$，$J_1(x)$，$J_n(x)$（n 是正整数）的级数表示式的前 5 项。

解 由贝塞尔函数的级数表示式知当 n 为整数时：

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

特别地

$$J_1(x)=\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7+$$

$$\frac{1}{4!5!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\cdots$$

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^8+\cdots$$

3. 证明 $J_{2n-1}(0)=0$，其中 $n=1,2,3,\cdots$

证 $J_{2n-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(2n+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2k-1}$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

不含常数项，所以 $J_{2n-1}(0)=0$

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(\alpha x)=?$

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(\alpha x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}J_0(\alpha x)=-\alpha J_1(\alpha x)$

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(\alpha x)]=?$

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(\alpha x)]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}[x_1J_1(\alpha x)]\dfrac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}x}=$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}[\alpha xJ_1(\alpha x)]=\alpha xJ_0(\alpha x)$

6. 证明 $y=J_n(\alpha x)$ 为方程

$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-n^2)y=0$ 的解。

证 方法1 由第二组递推公式(5.4)，式(5.5)得

$$J'_n(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x)$$

$$J'_n(x)=-J_{n-1}(x)+\frac{n}{x}J_n(x)$$

所以

$$y'=J'_n(\alpha x)=\alpha\frac{\mathrm{d}J_n(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)}=\alpha[-J_{n+1}(\alpha x)+\frac{n}{\alpha x}J_n(\alpha x)]=$$

$$-\alpha J_{n-1}(\alpha x)+\frac{n}{x}J_n(\alpha x)$$

$$y''=-\alpha J'_{n-1}(\alpha x)-\frac{n}{x^2}J_n(\alpha x)+\frac{n}{x}J'_n(\alpha x)$$

又

$$J'_{n+1}(\alpha x)=\alpha\frac{\mathrm{d}J_{n+1}(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)}=\alpha[J_n(\alpha x)-\frac{n+1}{\alpha x}J_{n+1}(\alpha x)]=$$

$$\alpha J_n(\alpha x)-\frac{n+1}{x}J_{n+1}(\alpha x)$$

所以

$$y''=-\alpha^2J_n(\alpha x)+\frac{\alpha(n+1)}{x}J_{n-1}(\alpha x)-\frac{n}{x^2}J_n(\alpha x)+$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

$$\frac{n}{x}[-aJ_{n-1}(ax)+\frac{n}{x}J_n(ax)]=$$

$$-a^2J_n(ax)+\frac{a(n+1)}{x}J_{n+1}(ax)-\frac{n}{x^2}J_n(ax)-$$

$$\frac{an}{x}J_{n-1}(ax)+\frac{n^2}{x^2}J_n(ax)=$$

$$-a^2J_n(ax)+\frac{a}{x}J_{n+1}(ax)$$

代入即得

$$x^2y''+xy'+(a^2x^2-n^2y)=0$$

方法 2　因 $y'=aJ'_n(ax)$，$y''=a^2J''_n(ax)$，由 $J_n(x)$ 是 n 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

的特解，得

$$(ax)^2J''_n(ax)+(ax)J'_n(ax)+[(ax)^2-n^2]J_n(ax)=0$$

7. 证明

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\frac{1}{x}\cos(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x-\frac{\pi}{2})]$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[(1-\frac{3}{x^2})\sin(x-\pi)+\frac{3}{\pi}\cos(x-\pi)]$$

解　先计算 $J_{\frac{1}{2}}(x)$，$J_{-\frac{1}{2}}(x)$，因

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\frac{3}{2}+m)}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}-2m}$$

又

$$\Gamma(\frac{3}{2}+m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot(\frac{3}{2}+m-1)\Gamma(\frac{3}{2})=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot(\frac{1}{2}+m)\Gamma(\frac{1}{2})=$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}{2^{m+1}}\Gamma(\frac{1}{2})=$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}$$

所以

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+1)!\sqrt{\pi}}\frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

同理可得 $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

由递推公式(5.4)得

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-\cos x+\frac{1}{x}\sin x)=$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})(\frac{\sin x}{x})$$

一般地,在式(5.7)中取 $n=\frac{1}{2}$ 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m\left[\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right]=(-1)^m\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(x)}{x^{m+\frac{1}{2}}}$$

即

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^m x^{m+\frac{1}{2}}(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x})^m\left[\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{2m+1}{2}}(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x})^m(\frac{\sin x}{x})$$

取 $m=2$,即得

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{5}{2}}(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x})^2(\frac{\sin x}{x})=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}[\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}]=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{3-x^2}{x^2}\sin x-\frac{3}{x}\cos x)=$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right]$$

8. 试证　$y=x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ 是方程

$$x^2y''+(x^2-2)y=0$$

的一个解。

证　因 $y=x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)$，易知

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)+$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{1}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)+x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}(x)$$

所以

$$x^2y''+(x^2-2)y=x^{\frac{3}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{3}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+$$

$$(x^2-2)x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}\left[x^2J''_{\frac{3}{2}}(x)+xJ'_{\frac{3}{2}}(x)+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)J_{\frac{3}{2}}(x)\right]$$

因 $J_{\frac{3}{2}}(x)$ 满足 $\frac{3}{2}$ 阶贝塞尔方程，即得结论成立。

9. 试证　$y=xJ_n(x)$ 是方程

$x^2y''-xy'+(1+x^2-n^2)y=0$ 的一个解。

证　容易计算得

$$y'=J_n(x)+xJ'_n(x)$$

$$y''=2J'_n(x)+xJ''_n(x)$$

所以

$$x^2y''-xy'+(1+x^2-n^2)y=$$

$$x^3J''_n(x)+2x^2J'_n(x)-xJ_n(x)-x^2J'_n(x)+$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$(1+x^2-n^2)xJ_n(x)=$$
$$x[x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)]=0$$

结论得证。

10. 设 $\lambda_i(i=1,2,3,\cdots)$ 是方程 $J_1(x)=0$ 的正根，将函数

$$f(x)=x \qquad (0<x<1)$$

展开成贝塞尔函数 $J_1(\lambda_i x)$ 的级数。

解 设 $f(x)=x=\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_1(\lambda_i x)$

利用函数系 $\{J_1(\lambda_i x)\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上的带权正交性得

$$A_i=\frac{1}{\frac{1}{2}J_0^2(\lambda_i)}\int_0^1 xf(x)J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x$$

由式(5.1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2J_2(x)]=x^2J_1(x)$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{(\lambda_i)^3}\int_0^1 \mathrm{d}[(\lambda_i x)^2J_2(\lambda_i x)]=\frac{1}{\lambda_i}J_2(\lambda_i)$$

在式(5.4)中取 $n=1$，令 $x=\lambda_i$，得

$$J_2(\lambda_i)=-J_0(\lambda_i)$$

所以

$$A_i=\frac{2}{J_0^2(\lambda_i)}\frac{1}{\lambda_i}J_2(\lambda_i)=-\frac{2}{\lambda_iJ_0(\lambda_i)}$$

即

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\lambda_iJ_0(\lambda_i)}\right)J_1(\lambda_i x) \qquad (0<x<1)$$

11. 设 $\alpha_i(i=1,2,3,\cdots)$ 是 $J_0(x)=0$ 的正根，将函数 $f(x)=x^2(0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_0(\alpha_i x)$ 的级数。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

解 设 $x^3 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n x)$

利用函数系 $\{J_0(\alpha_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上的正交性得

$$A_i = \frac{2\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x}{J_1^2(\alpha_i)}$$

在式(5.1)中分别取 $n=1, n=2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(x)] = xJ_0(x) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x)$$

由分部积分得

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(\alpha_i)^2}\int_0^1 x^2 \alpha_i x J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}(\alpha_i x) =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}[\alpha_i J_1(\alpha_i) - 2\int_0^1 x\alpha_i x J_1(\alpha_i x)\mathrm{d}x] =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}[\alpha_i J_1(\alpha_i) - \frac{2}{(\alpha_i)^2}\int_0^1 (\alpha_i x)^2 J_1(\alpha_i x)\mathrm{d}(\alpha_i x)] =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}[\alpha_i J_1(\alpha_i) - 2J_2(\alpha_i)]$$

在式(5.4)中取 $n=1$ 得

$$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x}J_1(x)$$

所以 $J_2(\alpha_i) = \frac{2}{\alpha_i}J_1(\alpha_i)$，进而得

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha_i}(1 - \frac{4}{(\alpha_i)^2})J_1(\alpha_i)$$

即

$$A_i = \frac{2}{\alpha_i J_1(\alpha_i)}(1 - \frac{4}{(\alpha_i)^2})$$

12. 设 $\alpha_i (i = 1,2,\cdots)$ 是方程 $J_0(2x) = 0$ 的正根，将函数

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ 0 & (1<x<2)\end{cases}$$

展开成贝塞尔函数 $J_0(a_ix)$ 的级数。

解 因 $J_0(2a_i)=0$，知 $2a_i$ 为 $J_0(x)$ 的零点。

又因

$$\int_0^2 xJ_0(a_ix)J_0(a_jx)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 2J_1^2(2a_i) & (i=j)\end{cases}$$

设 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_0(a_ix)$

同乘以 $xJ_0(a_jx)$ 在$[0,2]$上积分得

$$A_i=\frac{1}{2J_1^2(2a_i)}\int_0^2 xf(x)J_0(a_ix)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2J_1^2(2a_i)}\int_0^1 xJ_0(a_ix)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2J_1^2(2a_i)}\frac{1}{(a_i)^2}\int_0^1 \mathrm{d}[a_ixJ_1(a_ix)]=$$
$$\frac{J_1(a_i)}{2a_iJ_1^2(2a_1)}$$

于是所求展式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(a_i)}{2a_iJ_1^2(2a_i)}J_0(a_ix)$$

13. 把定义在$[0,a]$上的函数展开成贝塞尔函数 $J_0(\frac{a_ix}{a})$ 的级数，其中 a_i 是 $J_0(x)$ 正零点。

解 设 $f(x)$ 定义在$[0,a]$上，且

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_0(\frac{a_ix}{a})$$

由函数系$\{J_0(\frac{a_ix}{a})\}_{i=1}^{\infty}$在$[0,a]$上的正交性，类似于 12 题有

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$A_i = \frac{\int_0^a xf(x)J_0(\frac{\alpha_i}{R}x)\mathrm{d}x}{\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_i)}$$

即得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\int_0^a xf(x)J_0(\frac{\alpha_i}{R}x)\mathrm{d}x}{a^2J_1^2(\alpha_i)}$$

14. 若 $\lambda_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 是 $J_1(x)$ 正零点，证明：

$$\int_0^R xJ_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\lambda_i) & (i = j) \end{cases}$$

证

$$\int_0^R xJ_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2\int_0^R(\frac{\lambda_j}{R}x)J_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2[J_0(\frac{\lambda_i}{R}x)(\frac{\lambda_j}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\Big|_0^R - \int_0^R \frac{\lambda_j}{R}xJ'_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x] =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2[\lambda_jJ_0(\lambda_i)J_1(\lambda_j) + \int_0^R \frac{\lambda_i\lambda_j}{R^2}xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x] =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2\frac{\lambda_i\lambda_j}{R^2}\int_0^R xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\int_0^R xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\lambda_i) & (i = j) \end{cases}$$

15. 利用递推公式证明：

(1) $J_2(x) = J''_0(x) - \frac{1}{x}J'_0(x)$

(2) $J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0$

证 (1) 由式(5.3)知

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

由式(5.4)，式(5.5)得

$$J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

令 $n=1$,得

$$J'_1(x)=\frac{1}{x}J_1(x)-J_2(x)$$

所以

$$J''_0(x)-\frac{1}{x}J'_0(x)=-J'_1(x)+\frac{1}{x}J_1(x)=$$

$$-\frac{1}{x}J_1(x)+J_2(x)+\frac{1}{x}J_1(x)=J_2(x)$$

注:当然也可用下法求 $J'_1(x)$:

$$J'_1(x)=(x\cdot x^{-1}J_1(x))=x^{-1}J_1(x)-x\cdot x^{-1}J_2(x)=$$

$$\frac{1}{x}J_1(x)-J_2(x)$$

(2) 由(1) 及式(5.4) 得

$$J_2(x)=J''_0(x)+\frac{1}{x}J_1(x)=J''_0(x)+\frac{J_0(x)+J_2(x)}{2}$$

即 $$J_2(x)=2J''_0(x)+J_0(x)$$

求导得 $J'_2(x)=2J'''_0(x)+J'_0(x)$

在式(5.5) 中取 $n=2$,得

$$J_3(x)=-2J'_2(x)+J_1(x)=$$

$$-4J'''_0(x)-3J'_0(x)$$

注:也可采用下法证得。

由式(5.5) 得

$$J_2(x)=-2J'_2(x)+J_1(x)=-2J'_2(x)-J'_0(x)$$

又 $$J_2(x)=J_0(x)-2J'_1(x)$$

求导得 $$J'_2(x)=J'_0(x)-2J'''_0(x)$$

代入式(5.8) 即得

$$J_3(x)=-4J'''_0(x)-3J'_0(x)$$

16. 试证

$$\int x^nJ_0(x)dx=x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

$$(n-1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$$

证　由式(5.1)及分部积分得

$$\int x^nJ_0(x)\mathrm{d}x=\int x^{n-1}xJ_0(x)\mathrm{d}x=\int x^{n-1}\mathrm{d}(xJ_1(x))=$$

$$x^nJ_1(x)-(n-1)\int x^{n-1}J_1(x)\mathrm{d}x=$$

$$x^nJ_1(x)+(n-1)\int x^{n-1}\mathrm{d}(J_0(x))=$$

$$x^nJ_1(x)+(n-1)[x^{n-1}J_0(x)-$$

$$(n-1)\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x]=$$

$$x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-$$

$$(n-1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$$

结论得证。

17. 试解下列圆柱区域的边值问题：在圆柱内$\nabla^2u=0$，在圆柱侧面$u|_{\rho=a}=0$，在下底$u|_{z=0}=0$，在上底$u|_{z=h}=A$。

解　定解问题为

$$\begin{cases}u_{zz}=-\left(u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho\right) & (0<\rho<a,\ 0<z<h) \quad (1)\\ u|_{\rho=a}=0 \quad (2)\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=h}=A \quad (3)\end{cases}$$

引入自然边界条件　$|u(z,0)|<+\infty$　(4)

令$u(z,\rho)=G(z)R(\rho)$，代入(1)式得

$$-\frac{G''(z)}{G(z)}=\frac{R''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}R(\rho)}{R(\rho)}\overset{\text{def}}{=\!=}\lambda$$

得
$$G''(z)-\lambda G(z)=0 \quad (5)$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\lambda\rho^2R(\rho)=0 \quad (6)$$

令$\lambda=\beta^2$(对λ的讨论参见例5-8)，则

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!

$$R(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho) + C_2 Y_0(\beta\rho)$$

由式(4)知 $$C_2 = 0$$

所以 $$R(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho)$$

由式(2)得

$$R(a) = 0$$

所以

$$C_1 J_0(\beta a) = 0$$

因 C 不能为零，所以得一系列的 β 值：

$$\beta a_n = \mu_n^{(0)} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的零点，即

$$\beta_n = \frac{\mu_n^{(0)}}{a}, R_n(\rho) = C_n J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

将 $\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\right)^2$ 代入式(5)得

$$G_n(z) = a_n e^{\frac{\mu_n}{a}z} + b_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}$$

得一系列特解，叠加后得

$$u(z,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)$$

由式(3)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) = A$$

所以利用 14 题结论得

$$A_n + B_n = 0$$

$$A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} = \frac{2\int_0^a A r J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}r\right)\mathrm{d}r}{a^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} =$$

$$\frac{2A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})}$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园！

联立得

$$A_n = -B_n = \frac{A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) \sinh(\frac{\mu_n^{(0)}}{a} h)}$$

所以原定解问题的解为

$$u(z,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) \sinh(\frac{\mu_n^{(0)}}{a} h)} \sinh(\frac{\mu_n^{(0)}}{a} z) J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{a} \rho)$$

18. 解下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \rho}) & (1) \\ u|_{t=0} = 1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}, \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 & (2) \\ u|_{\rho=0} < \infty, u|_{\rho=R} = 0 & (3) \end{cases}$$

若上述方程换成非齐次的，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -B \quad (B \text{ 为常数}) \tag{4}$$

而所有定解条件均为零，试求其解。

解 （一）解式(1) ～ (3)

设 $u(\rho,t) = F(\rho)T(t)$，代入式(1) 得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho)}{F(\rho)} \xrightarrow{\text{def}} \lambda$$

由此得

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{5}$$

$$\rho^2 F''(\rho) + \rho F'(\rho) + \lambda \rho^2 F(\rho) = 0 \tag{6}$$

令 $\lambda = \beta^2$（对 λ 的讨论见例 5－8），则

$$F(\rho) = C_1 J_0(\beta \rho) + C_2 Y_0(\beta \rho)$$

由 $u|_{\rho=0} < \infty$ 知 $C_2 = 0$，即

$$F(\rho) = C_1 J_0(\beta \rho)$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园！

$$C_1 J_0(\beta R) = 0$$

C_1 不为零，所以

$$\beta R = \mu_n^{(0)}$$

得一系列的 β 值

$$\beta_n = \frac{\mu_n^{(0)}}{R} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的零点，显见

$$F_n(\rho) = C_n J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho)$$

将 $\lambda_n = \beta_n^2 = (\frac{\mu_n^{(0)}}{R})^2$ 代入式(5)得

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}t + b_n \sin\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}t$$

得一系列特解

$$u_n(\rho, t) = (A_n \cos\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}t + B_n \sin\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}t) J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho)$$

叠加后得

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}t + B_n \sin\frac{a\mu_n^{(0)}t}{R}) J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho)$$

由式(2)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{R^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho) = 0$$

利用前文第 14 题结论，得

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2\int_0^R \rho(1 - \frac{\rho^2}{R^2}) J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho)\mathrm{d}\rho}{R^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} = \frac{2\,\frac{4R^2}{(\mu_n^{(0)})^3} J_1(\mu_n^{(0)})}{R^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} = \frac{8}{(\mu_n^{(0)})^3} J_1(\mu_n^{(0)})$$

www.bjcugb.com 北地论坛 北地人的精神家园!

所以原定解问题的解为

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8J_1(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2}\cos\frac{a\mu_n^{(0)}}{R}tJ_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho)$$

（二）解方程是非齐次的，其定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=-B & (7)\\ u\mid_{t=0}=0,\quad u_t\mid_{t=0}=0 & (8)\\ u\mid_{\rho=0}<\infty,\quad u\mid_{\rho=R}=0 & (9)\end{cases}$$

方法 1　注意到方程有不依赖于 t 的非齐次项，设

$$u(\rho,t)=v(\rho,t)+w(\rho) \tag{10}$$

其中 $w(\rho)$ 满足：

$$\begin{cases}\rho w''(\rho)+w'(\rho)=-B\rho\\ w(R)=0\quad |W(0)|<+\infty\end{cases}$$

解之得　　$w(\rho)=\dfrac{B}{4}(R^2-\rho^2)$

则 $v(\rho,t)$ 满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2v}{\partial t^2}=a^2(\dfrac{\partial^2v}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\rho}) & (11)\\ v\mid_{\rho=0}<\infty\qquad v\mid_{\rho=R}=0 & (12)\\ v\mid_{t=0}=\dfrac{B}{4}(\rho^2-R^2)\qquad v_t\mid_{t=0}=0 & (13)\end{cases}$$

用分离变量法解式(11)～(13)，解法法参阅(一)得

$$v(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2BR^2}{[\mu_m^{(0)}]^2J_1(\mu_m^{(0)})}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R}tJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)$$

所以原定解问题的解为

$$u(\rho,t)=v(\rho,t)+w(\rho)=$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2BR^2}{[\mu_m^{(0)}]^2J_1(\mu_m^{(0)})}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R}tJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)+$$
$$\frac{BR^2}{4}(1-\frac{\rho^2}{R^2})$$

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

方法 2　用固有函数法。由（一）知固有函数系为 $\left\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)\right\}_{m=1}^{\infty}$，设解为

$$u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho) \tag{15}$$

将非齐次项按固有函数系展开为

$$a^2B=\sum_{m=1}^{\infty}b_mJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho) \tag{16}$$

其中

$$b_m=\frac{a^2B}{\frac{R^2}{2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^R\rho J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{2a^2B}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}$$

将式(15),(16)代入式(7)得

$$T''_m(t)+(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}a)^2T_m(t)=b_m\quad(m=1,2,\cdots) \tag{17}$$

将式(15)代入式(9)得

$$T_m(0)=0\quad T'_m(0)=0 \tag{18}$$

解式(17),(18)得

$$T_m(t)=\frac{-2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3J_1(\mu_m^{(0)})}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R}t+\frac{2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3J_1(\mu_m^{(0)})}$$

代入式(15)即得原定解问题的解为

$$u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3J_1(\mu_m^{(0)})}(1-\cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R}t)J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)$$

注：将(14)式中的函数$\frac{BR^2}{4}(1-\frac{\rho^2}{R^2})$按函数系$\{J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho)\}$展开，即可看出两种做法结论一致。

19. 证明整数阶贝塞尔函数的母函数为

$$w(x,t)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$$

即 $w(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园！

证　利用 e^x 的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < +\infty$$

将 $e^{\frac{1}{2}x}$ 及 $e^{-\frac{x}{2t}}$ 按 t 展开得

$$e^{\frac{1}{2}x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}t\right)^j$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2t}\right)^k$$

对任意固定的 x，这两个级数在 $0 < |t| < \infty$ 内绝对收敛，故可作逐项相乘，得

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}t\right)^j - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2t}\right)^k =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k}}{j!k!t^{j-k}}$$

令 $n = j - k$，则

$$w(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} t^n$$

由 $J_n(x)$ 的级数表达式结论证得。

www.bjcugb.com
北地论坛
北地人的精神家园!